

ベルヌーイ型変換の軌道に関する研究

情報システム工学科 4年 096 番 0208060469 山本真之

1. ベルヌーイ型変換の軌道とは

$I=[0,1]$, $I=I_0 \cup I_1$, $x_0 \in I$ となる区間 I において、次のような変換 T を考える。

$T: I \rightarrow I$, $T(I_0)=T(I_1)=I$ 。このような変換をベルヌーイ型変換と呼ぶ。

また、 $x_0 \in I=I_0 \cup I_1=[0,1]$ に対して $x_1=T(x_0)$, $x_k=T^k(x_0)$ と書き、 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ を初期値 x_0 の軌道と呼ぶ。

2. ベルヌーイ型変換の軌道の性質

- $\exists n_0 : T^{n_0}(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0$ が有理数
- $\exists N, \exists P : T^{n+P}(x_0)=T^n(x_0)$ が全ての $n \geq N$ について成り立つ (初期値 x_0 が周期 P の周期点を持つ) $\Leftrightarrow x_0$ は2次無理数

以上2つの必要十分条件から、3次無理数の初期値 x_0 は決して周期的にならない。

3. ベルヌーイ型変換に関する問題点

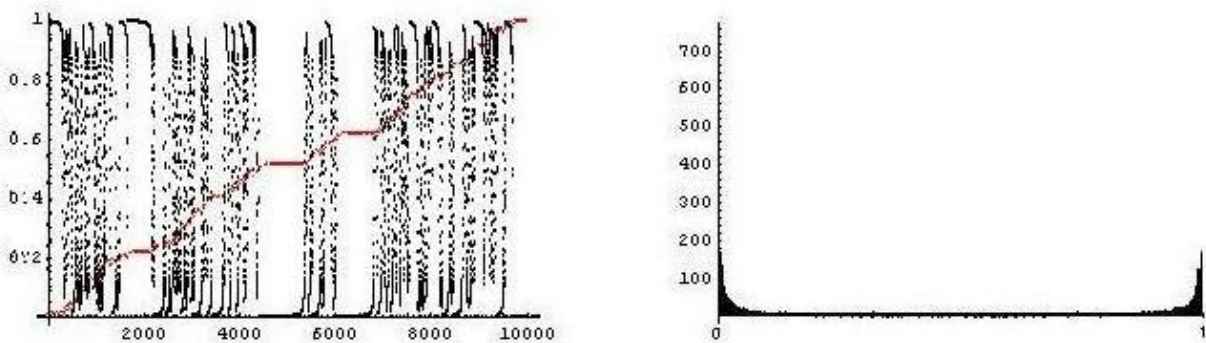
3次無理数を初期値として計算機で $x_n=T^n(x_0)$ の具体的な値を求める場合、丸め誤差が発生する。その結果は、その後の $x_{n+1}=T^{n+1}(x_0)$, $x_{n+2}=T^{n+2}(x_0) \cdots$ の値にも影響を及ぼし、正しい値を求めることができなくなってしまう。

4. 丸め誤差問題の解決

1つの3次無理数の実数解 $\lambda_0 \in [0,1]$ と、2つの虚数解 $\lambda', \lambda'' (\lambda''=\bar{\lambda}')$ を持つ3次方程式に着目した。そのような3次方程式を用いて、ベルヌーイ型変換を繰り返し行う操作を、3次方程式を次々と生成することに転換した。この操作は全て整数演算で行われるため、 $x_n=T^n(x_0)$ の値を求めるときに丸め誤差は生じるが、その結果は後の結果に影響を及ぼさない。

5. シミュレーションによる実験結果

軌道計算の試行回数を1万回として、シミュレーションを行った。



左図: 実数解(黒点)と3次方程式係数の桁の関係(横軸試行回数)

右図: 実数解の値の頻度分布(0~1の区間を千等分)

6. 感想

ベルヌーイ型変換の軌道に関して、誤差を引きずらない方法で求めることができた。シミュレーションの結果から、実数解が0や1の近辺に偏るとき、3次方程式の桁はほとんど変わらないことが分かる。得られた結果について、数学的な意義を与えられなかったことが反省点であり今後の課題である。