

# 部分空間分割によるブラインド形 マルチチャネル推定における誤差解析

## Error Analysis of Blind Multichannel Identification Based on Subspace Method

古田 慎太郎†      中山 謙二‡      平野 晃宏‡  
Shintaro Furuta      Kenji Nakayama      Akihiro Hirano

†金沢大学大学院 自然科学研究科 電子情報システム専攻  
Graduate School of Nature Science & Technology, Kanazawa Univ.

‡金沢大学 工学部 情報システム工学科  
Dept. of Information and Systems Eng., Faculty of Eng., Kanazawa Univ.  
E-mail: nakayama@t.kanazawa-u.ac.jp

### あらまし

部分空間分割によるブラインド形マルチチャネル推定アルゴリズム [2] において誤差の要因を解析する。このアルゴリズムは受信信号の空間を信号部分空間と雑音部分空間 (直交補空間) に分割しその直交性から最適なチャネル等化を行なうものである。この方式では、相関行列の計算における受信信号のサンプル数制限や雑音混入のためその直交性が崩れると考えられる。これらの要因が与えるチャネル推定への影響について解析する。

### Abstract

Blind multichannel identification based on subspace method is taken into account in this paper. Effects of the number of received signal samples used in estimating the correlation matrix, and channel noise are analyzed. A small number of samples, that is the dimension of the received signal plus several samples are enough. In other word, deviation in the correlation matrix of the transmitted symbols has no influence on channel estimation. Also, including the ideal white noise can hold high precision channel estimation. When the noise correlation matrix has some deviation due to limitation of the number of samples, channel estimation is highly degraded. This means nondiagonal elements has very high sensitivity on channel estimation.

### 1 まえがき

近年、携帯電話をはじめとする移動体通信の加入者数は、爆発的に増加しているなかで無線通信では膨大なデータ伝送を行なうために高速かつ正確なチャネル等化及び符号推定が求められる。そのようななかでトレーニング信号を必要としないブラインド形のチャネル推定法が提案されている [1]-[4]。本研究では、部分空間を利用したブラインドチャネル推定 (Subspace Methods for the Blind Identification) アルゴリズム [2] において、相関行列を計算する際の受信信号のサンプル数制限や雑音の混入によって引き起こされる符号間相関、信号部分空間と雑音部分空間の直交性のくずれなどがマルチチャネルの推定精度に及ぼす影響を解析する。

### 2 ブラインドチャネル推定

#### 2.1 ブラインド等化の構成図

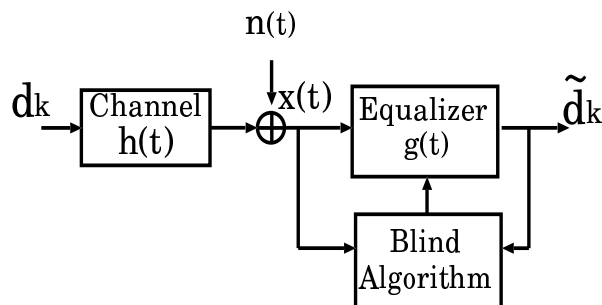


図 1: ブラインドチャネル推定のダイアグラム

ブラインドチャネル推定の構成を図1に示す。情報シンボル  $d_k$  とチャネルインパルス応答  $h(t)$  の畳み込みで与えられる送信信号に雑音  $n(t)$  が加えられたものを受信信号  $x(t)$  とし、この  $x(t)$  の情報のみからチャネル等化を行なう。

## 2.2 信号構成

信号部分空間と雑音部分空間の直交性を利用してマルチチャネルをブラインド処理で推定する方法について説明する [2]。信号の観測始点時間を  $t_0$ 、サンプリング間隔を  $\Delta$  とし情報シンボルの周期  $T$  を  $T = T_s \Delta$  とする時、 $i$  チャネル目の受信信号

$$\mathbf{x}_n^{(i)} = x(t_0 + i\Delta + nT) \quad (1)$$

$$= \sum_{m=0}^M d_{n-m} h(t_0 + i\Delta + mT) + b_n^{(i)} \quad (2)$$

$$= r_n^{(i)} + b_n^{(i)} \quad (0 \leq i \leq L-1) \quad (3)$$

を  $N$  サンプル積み上げたものを

$$\mathbf{X}_n^{(i)} = [\mathbf{x}_n^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_{n-N+1}^{(i)}]^T \quad (4)$$

とする。離散時間チャネルインパルス応答を  $\mathbf{H}^{(i)}$  とし

$$\mathbf{H}^{(i)} = [h_0^{(i)}, \dots, h_M^{(i)}]^T \quad (5)$$

$$= [h(t_0 + i\Delta), \dots, h(t_0 + i\Delta + MT)]^T \quad (6)$$

$$\mathcal{H}_N^{(i)} = \begin{bmatrix} h_0^{(i)} & \dots & h_M^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0^{(i)} & \dots & h_M^{(i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & h_M^{(i)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

のようにチャネル特性を  $\mathcal{H}_N^{(i)}$  ( $\dim.N \times (N+M)$ ) として構成する。送信信号の情報シンボル  $\mathbf{D}_n$  ( $\dim.(N+M) \times 1$ )、ノイズを  $\mathbf{B}_n^{(i)}$  ( $\dim.N \times 1$ ) とすると  $i$  チャネル目の受信信号  $\mathbf{X}_n^{(i)}$  は

$$\mathbf{D}_n = [d_n, \dots, d_{n-N-M+1}] \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_n^{(i)} = [b_n^{(i)}, \dots, b_{n-N+1}^{(i)}] \quad (9)$$

$$\mathbf{X}_n^{(i)} = \mathcal{H}_N^{(i)} \mathbf{D}_n + \mathbf{B}_n^{(i)} \quad (10)$$

と表される。これらを  $L$  チャネル用いて受信信号を

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_n^{(0)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^{(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_n^{(0)} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_n^{(L-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_n^{(0)} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n^{(L-1)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

とし、まとめて

$$\mathbf{X}_n = \mathcal{H}_N \mathbf{D}_n + \mathbf{B}_n \quad (12)$$

$\mathbf{X}_n$ :  $LN \times 1$  行列

と表す。ここでチャネル特性をならべた

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}^{(0)T}, \dots, \mathbf{H}^{(L-1)T}]^T \quad (13)$$

$\mathbf{H}$ :  $L(M+1) \times 1$  行列

を  $\mathbf{X}_n$  のみから推定することがブラインドチャネル推定の目的である。

## 2.3 チャネル推定アルゴリズム

情報シンボルは  $\{\pm 1\}$  のランダム信号、ノイズは白色であるとし、まず受信信号の相関行列を求める。

$$\mathbf{R}_x = E(\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^H) \quad (14)$$

$$= \mathcal{H}_N \mathbf{R}_d \mathcal{H}_N^H + \mathbf{R}_b \quad (15)$$

$$= \mathcal{H}_N \mathbf{I} \mathcal{H}_N^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{R}_d$ ,  $\mathbf{R}_b$  はそれぞれ情報シンボル、ノイズの相関行列、 $\sigma^2$  は雑音の分散である。次に  $\mathbf{R}_x$  を固有値分解することによって固有値  $\{\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{LN-1}\}$  とそれに対応する固有ベクトルを求めることができる。

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{LN-1}) \mathbf{U}^H \quad (17)$$

ここで信号空間の次元は  $N+M$  であるから

$$\lambda_i > \sigma^2 \quad i = 0, \dots, N+M-1 \quad (18)$$

$$\lambda_i = \sigma^2 \quad i = N+M, \dots, LN-1 \quad (19)$$

上記の信号空間、雑音空間の固有値に対応する固有ベクトルを順に  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{G}$  とすると

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_0, \dots, \mathbf{S}_{N+M-1}] \quad (20)$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_0, \dots, \mathbf{G}_{LN-N-M-1}] \quad (21)$$

$\mathbf{S}$ :  $LN \times (N+M)$  行列

$\mathbf{G}$ :  $LN \times (LN - N - M)$  行列

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{S} \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N+M-1}) \mathbf{S}^H + \sigma^2 \mathbf{G} \mathbf{G}^H \quad (22)$$

$\mathbf{S}$  の列ベクトルが信号部分空間を張り、 $\mathbf{G}$  の列ベクトルがその直交補空間である雑音部分空間を張る。これらを用いて (22) のように  $\mathbf{R}_x$  を固有値分解したものを信号部分空間と雑音部分空間に分ける形に書き直すことができる。ここで、 $\mathbf{S}$  に対して  $\mathbf{G}$  はその直交補空間であるからこの二つの空間は直交関係にある。また  $\mathbf{S}$  は  $\mathcal{H}_N$  の列ベクトルによって張られた線形空間であるので、次式が成り立つ。

$$\mathbf{G}_i^H \mathcal{H}_N = \mathbf{0} \quad (23)$$

$$0 \leq i < LN - N - M$$

この式 (23) を満たす  $\mathcal{H}_N$  が求められればチャネル特性が推定できる。この式はチャネルインパルス応答に対して線形である。また、 $\mathbf{G}_i$  としては有限のサンプルを用いた推定値  $\hat{\mathbf{G}}_i$  が求められているので  $\mathcal{H}_N$  を最小二乗推定で求める。

$$q(\mathbf{H}) = \sum_{i=0}^{LN-M-N-1} |\hat{\mathbf{G}}_i^H \mathcal{H}_N|^2 \quad (24)$$

すなわち、式 (23) を解く代わりに式 (24) を最小とする  $\mathcal{H}_N$  を求める。ここで上式の解を求めるために  $\mathcal{H}_N$  に対する  $\mathbf{H}$  のような関係を  $\hat{\mathbf{G}}_i$  についても考える。 $\hat{\mathbf{G}}_i$  は  $LN \times 1$  であり

$$\hat{\mathbf{G}}_i = [\hat{\mathbf{G}}_i^{(0)T}, \dots, \hat{\mathbf{G}}_i^{(L-1)T}]^T \quad (25)$$

とおける。これは  $\mathcal{H}_N$  に対する  $\mathbf{H}$  の関係でいえば  $\mathbf{H}$  に対応する。 $\hat{\mathbf{G}}_i$  において  $\mathcal{H}_N$  に対応するものを  $\hat{g}_i$  とすると、

$$\hat{g}_i^{(l)} = \begin{bmatrix} v_0^{(l)} & \cdots & v_{N-1}^{(l)} & 0 & \cdots \\ 0 & v_0^{(l)} & \cdots & v_{N-1}^{(l)} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\hat{g}_i^{(l)}: (M+1) \times (M+N) \text{ 行列}$$

と表せる。これを  $L$  個積み上げたものが  $\hat{g}_i$  となり

$$\hat{g}_i = [\hat{g}_i^{(0)T}, \dots, \hat{g}_i^{(L-1)T}]^T \quad (27)$$

$$\hat{g}_i: L(M+1) \times (M+N) \text{ 行列}$$

表すことができる。上記のことから次のような変換が行なえる。

$$\hat{\mathbf{G}}_i^H \mathcal{H}_N = \mathbf{H}^H \hat{g}_i \quad (28)$$

これを用いて

$$|\hat{\mathbf{G}}_i^H \mathcal{H}_N|^2 = \hat{\mathbf{G}}_i^H \mathcal{H}_N \mathcal{H}_N^H \hat{\mathbf{G}}_i \quad (29)$$

$$= \mathbf{H}^H \hat{g}_i \hat{g}_i^H \mathbf{H} \quad (30)$$

式 (30) を用いることで式 (24) は

$$q(\mathbf{H}) = \mathbf{H}^H \left( \sum_{i=0}^{LN-M-N-1} \hat{g}_i \hat{g}_i^H \right) \mathbf{H} \quad (31)$$

$$= \mathbf{H}^H \mathbf{Q} \mathbf{H} \quad (32)$$

とおける。式 (32) において  $q(\mathbf{H})$  を最小とする解  $\mathbf{H}$  は  $|\mathbf{H}| = 1$  を条件とする時  $\mathbf{Q}$  の最小固有値に対応する固有ベクトルとして解が導かれる。

### 3 サンプル数及び雑音の問題点

このアルゴリズムにおける問題点としてブラインド推定のために受信信号を何サンプル必要とするかということが挙げられる。このアルゴリズムは式 (16) のように受信信号の相関行列を用いるが、実際はこのような集合平均で相関行列を計算することはできず、

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^H \quad (33)$$

式 (33) のような時間平均で求めることとなる。式 (33) において送信信号及び雑音がエルゴートのであり、かつサンプル数  $N$  を限りなく多くとれば集合平均に近づく。一方、サンプル数が少なければ符号間の相関性は零とはならず式 (16) の形はくずれる。つまり情報シンボル、雑音それぞれの自己相関  $\mathbf{R}_d$ ,  $\mathbf{R}_b$  は理想的には対角行列であるが、式 (33) のサンプル数  $N$  を制限とすることにより非対角要素が零でなくなる。この値の出現が推定誤差に影響していると考えられる。雑音の影響は受信信号における SNR が低い場合、サンプル数が少なければ相関行列が変動し分散の推定誤差や非対角要素の値が大きくなることが考えられる。以上のような点に重点をおき計算機実験を行なう。

### 4 シミュレーション結果

SNR, 推定誤差は

$$SNR = 10 \log \frac{\|\mathbf{r}\|^2}{\|\mathbf{b}\|^2} \quad (dB) \quad (34)$$

$$NRMSE = \frac{1}{\|\mathbf{H}\|} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\hat{\mathbf{H}}^{(i)} - \mathbf{H}\|^2} \quad (35)$$

で求める。SNR における  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{b}$  は式 (3) で表されたものである。推定誤差は式 (35) の dB 表示で求めるものとする。

#### 4.1 雑音がない場合

雑音を混入せず以下のような条件でマルチチャネル推定を行なった。

- チャネル数:  $L = 4$   
チャネル  $\mathbf{H}^{(i)}$  の長さ:  $M = 5$   
チャネルにおいて積み上げる数:  $N = 6$   
信号次元:  $N+M=11$
- $L = 3, M = 7, N = 8$ , 信号次元 15

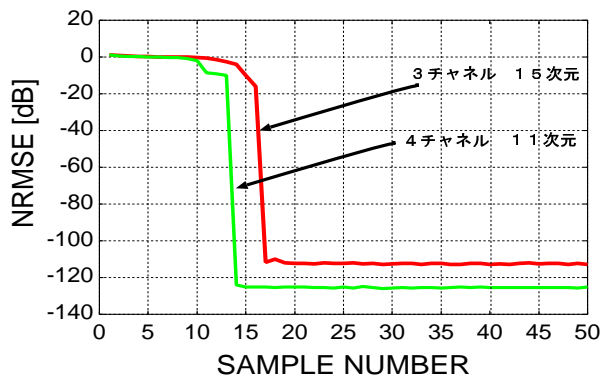


図 2: 雑音を含まない場合のチャンネル推定誤差

雑音を含まない状態で受信したとすると相関行列の時間平均で求めることによる誤差は $\mathbf{R}_d$ の誤差 $\Delta\mathbf{R}_d$ だけであるから

$$\mathbf{R}_x = \mathcal{H}_N \mathbf{R}_d \mathcal{H}_N^H \quad (36)$$

$$\approx \mathcal{H}_N (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{R}_d) \mathcal{H}_N^H \quad (37)$$

と与えられる。理想的な $\mathbf{R}_d$ は単位行列 $\mathbf{I}$ となる。図2をみると、サンプル数は(信号次元)+(数サンプル)で推定誤差が小さくなっていることがわかる。これよりサンプル数制限によって引き起こされる誤差 $\Delta\mathbf{R}_d$ はチャンネル推定にあまり影響しないことがわかる。

## 4.2 雑音を含む場合

雑音を混入した場合を考える。図3はSNRに対してその推定誤差を表したものである。

- L = 4, M = 5, N = 6, 信号次元 11

上記の条件でチャンネル推定を行いサンプル数は 100, 250, 1000, 5000 の場合において行なった。

図2と比べて大きく推定誤差が出ていることがわかる。雑音がかなり推定誤差に関わってくるといえる。

## 4.3 理想的な白色雑音

理想的な白色雑音が混入した場合(限りなくサンプル数が多い場合)を考える。この場合 $\mathbf{R}_b$ は $\sigma^2 \mathbf{I}$ と表される。

$$\mathbf{R}_x = \mathcal{H}_N \mathbf{R}_d \mathcal{H}_N^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (38)$$

- L = 4, M = 5, N = 6, 信号次元 11

上記の条件で行なった結果が図4である。図4を見ると推定誤差はかなり小さいことがわかる。SNRが低い場合、例えば雑音に埋もれてしまっている状態でも推定

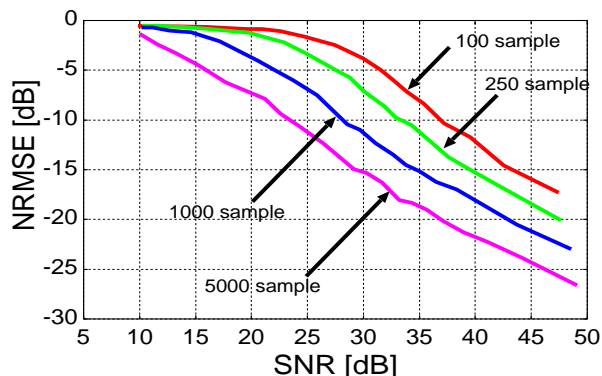


図 3: 雑音を含む場合のSNRに対するチャンネル推定誤差

できていることがわかる。次に図4と図2を見比べてみると理想的な白色雑音が入った場合の推定誤差の値と雑音の入っていない状態の推定誤差の値がほぼ同じような値をとっていることがわかる。つまり理想的な雑音(相関行列の対角要素=分散, 非対角要素=0)が加わった場合その大きさがどのようなものであっても推定誤差にはさほど影響しないことがわかる。

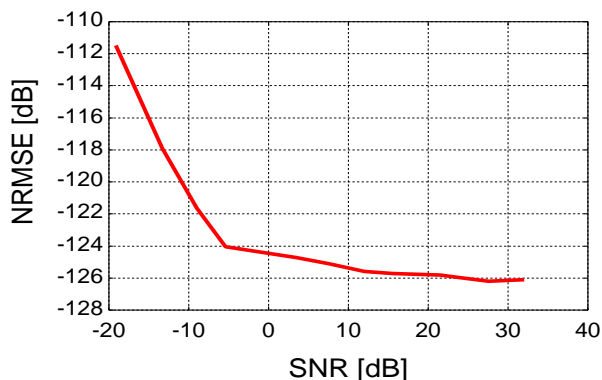


図 4: 理想的な白色雑音を含む場合のSNRに対するチャンネル推定誤差

## 4.4 理想的な白色雑音からの変動

雑音の相関行列 $\mathbf{R}_b$ の誤差を $\Delta\mathbf{R}_b$ とする。 $\Delta\mathbf{R}_b$ は対角要素及び非対角要素の双方に誤差を含んでいる。 $\mathbf{R}_x$ は次のように分解できる。

$$\mathbf{R}_x = \mathcal{H}_N \mathbf{R}_d \mathcal{H}_N^H + \mathbf{R}_b \quad (39)$$

$$\approx \mathcal{H}_N (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{R}_d) \mathcal{H}_N^H + \sigma^2 \mathbf{I} + \Delta\mathbf{R}_b \quad (40)$$

ここで前シミュレーション結果より $\Delta\mathbf{R}_d$ 及び $\sigma^2 \mathbf{I}$ の項は推定誤差への影響が小さいことがわかっているため

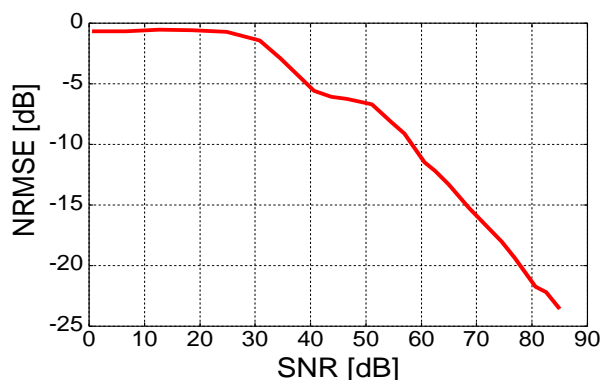


図 5: 相関行列の誤差に対するチャンネル推定誤差

式(40)より $\Delta \mathbf{R}_b$ が推定誤差に大きく関わってくるのではないかと考えられる。そこで次のような条件で計算機実験を行なった。

- $L = 4$ ,  $M = 5$ ,  $N = 6$ , 信号次元 11

$$SNR = 10 \log \frac{\mathcal{H}_N \mathbf{R}_d \mathcal{H}_N^H \text{の各要素の二乗和}}{\Delta \mathbf{R}_b \text{の各要素の二乗和}} \quad (41)$$

この実験における SNR は式(41)を用いることにより $\Delta \mathbf{R}_b$ の出現率による推定誤差を図5のように得られた。 $\Delta \mathbf{R}_b$ の出現がチャンネル推定に大きく影響していることがわかる。

## 5 むすび

部分空間分割によるブラインド形マルチチャンネル推定の誤差解析を行なった。相関行列推定に必要なサンプル数に関しては、雑音が混入しない状態では(信号次元) + (数サンプル)によってチャンネル推定が可能であることがわかった。また $\mathbf{R}_d$ の誤差はチャンネル推定にあまり影響しないことがわかった。理想的な白色雑音に加わった場合、つまり $\mathbf{R}_b$ が $\sigma^2 \mathbf{I}$ で表せる場合、SNRが低くても雑音を加えていない状態と同じような高精度のチャンネル推定が可能である。理想的な白色雑音から変動する、すなわち、サンプル数の制限により $\mathbf{R}_b$ が $\sigma^2 \mathbf{I}$ から変動するとそのチャンネル推定に与える影響は大きい。今回の解析結果に基づき、サンプル数や雑音の影響が小さいチャンネル推定方式を検討することが今後の課題である。

## 参考文献

- [1] L.Tong and G.Xu and T.Kailath: "Blind Identification and Equalization Based on Second-order Statics: A Time Domain Approach," IEEE Inform.Theory, vol.40, NO.2, pp.340-349, March 1994.
- [2] E.Moulines,P.Duhamel,J.F.Cardoso and S.Mayrargue: "Subspace Methods for the Blind Identification of Multichannel FIR Filters," IEEE Trans. Signal Processing, vol.43, NO.2, pp.516-525, February 1995.
- [3] P.Stoica and A.Nehorai,"MUSIC maximum likelihood and Cramer-Rao bounds,"IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol.37, pp.720-741,1989.
- [4] M.Torlak and G.Xu: "Blind Multiuser Channel Estimation in Asynchronous CDMA Systems," IEEE trans . Signal Processing, vol.45, NO.1, pp.137-147, January 1997.